数理解析研究所講究録
1492 巻 2006 年 1-21

Remainders and Smirnov compactifications

赤池 祐次 (Yuji Akaike)
(呉工業高等専門学校)
(Kure National College of Technology)
知念 直紹 (Naotsugu Chinen)
(沖縄工業高等専門学校)
(Okinawa National College of Technology)
友安 一夫 (Kazuo Tomoyasu)
(都城工業高等専門学校)
(Miyakonojo National College of Technology)

概要

本稿では，距離に依存するコンパクト化として知られている Smirnov コンパクト化の完全性と剰余の次元に関して得られた結果を紹介する．

1 序章

$C^*(X)$ を X 上の実数値有界連続関数全体で一様収束位相が入っているものとし，$U_d^*(X)$ を距離空間 (X,d) 上の実数値有界一様連続関数全体とする．$U_d^*(X)$ を $C^*(X)$ の部分集合と考えると閉部分環となり，$U_d^*(X)$ により生成されたコンパクト化を Smirnov コンパクト化といい u_dX と表記する．この表記からも分かるように Smirnov コンパクト化は距離に依存するコンパクト化であり，以下の特徴付けが知られている．

命題 1.1. [18, Theorem 2.5] (X,d) をコンパクトでない距離空間としたとき，以下は同値である．

(1) X のコンパクト化 αX は u_dX と同値[1]，すなわち $\alpha X \approx u_dX$ である．

[1] X のコンパクト化 αX と γX が同値であるとは同相写像 $f:\alpha X\to\gamma X$ が存在して，$f|_X$ が X 上恒等写像であるときをいい，$\alpha X\approx\gamma X$ とかく．

(2) X における互いに素な閉集合 A, B に対して, $\mathrm{Cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{Cl}_{\alpha X} B = \emptyset$ であることと $d(A, B) > 0$ であることは同値である.

このように距離に依存する Smirnov コンパクト化に対して，本稿ではその完全性と剰余の次元に関して得られた幾つかの結果を紹介する．また，コンパクト化の完全性の定義は次章で与える．

Smirnov コンパクト化の完全性に関する研究は R. G. Woods [18] の論文が発端となっている．1995 年に R. G. Woods は $\mathbb{R}$ 上の通常の距離 d における Smirnov コンパクト化 $u_d\mathbb{R}$ が完全であることを示し，次の問題を提示した．

問題 1.2. n が 2 以上の自然数であるとき，$\mathbb{R}^n$ 上の通常の距離 d_n に対する Smirnov コンパクト化 $u_{d_n}\mathbb{R}^n$ は完全であるか?

しかし，この問題自体は翌年 M.G. Charalambous [6] により肯定的に解決されている．実際，M.G. Charalambous は以下の定理を示している．

定理 1.3. [6, M.G. Charalambous] X をノルム線形空間のコンパクトでない凸部分空間とし，d をその部分距離とする．このとき，(X, d) の Smirnov コンパクト化 u_dX は完全コンパクト化である．

本稿では, この M.G. Charalambous の結果を含み，距離空間の Smirnov コンパクト化が完全となるための十分条件を与える．さらに，距離空間における Smirnov コンパクト化が完全であることの必要十分条件を局所連結でプロパーな距離空間において与えることができた．ここで，距離空間 (X, d) がプロパーであるとは，任意の d-有界閉集合がコンパクトであるときをいう．

次に Smirnov コンパクト化の剰余の次元に関しては，既に次の定理が知られている．

定理 1.4. [16, Ju M. Smirnov] コンパクトでない距離空間 (X, d) に対して $\dim u_dX \setminus X = \dim^\infty(X, d)$ が成立する．但し，$\dim^\infty(X, d)$ は距離空間 (X, d) の縁次元[2]である．

上記の定理は，距離空間 (X, d) の Smirnov コンパクト化の剰余 $u_dX \setminus X$ の被覆次元は (X, d) の縁次元で与えられるということを示している．しかし，Smirnov コンパクト化の剰余は一般に距離化可能でないので，Smirnov の定理から直ちに $\mathrm{Ind}\, u_dX \setminus X$ や $\mathrm{ind}\, u_dX \setminus X$ を計算することはできない．そこで，以下の問題を掲げるに至った．

[2]縁次元は距離に依存する次元関数であり，定義等は [12] が詳しい．また，本稿ではせいぜい Smirnov の定理を参照する程度なので定義を知っておく必要はない．

問題 1.5. 距離空間 (X,d) の Smirnov コンパクト化の剰余 $u_dX \setminus X$ に対して，その帰納的次元 $\operatorname{Ind} u_dX \setminus X$ と $\operatorname{ind} u_dX \setminus X$ を計算せよ．

本稿では上記の問題 1.5 を考え，特に，ユークリッド空間の Smirnov コンパクト化の剰余の帰納的次元を計算し，その結果の応用も得た．

2 Smirnov コンパクト化と完全性

完全コンパクト化の概念は 1960 年代に E. G. Sklyarenko により導入され，点型コンパクト化の特徴づけに有効であることが知られている (cf. [12], [15])．完全正則空間 X のコンパクト化 αX が完全であるとは，X の任意の開集合 U に対して，$\mathrm{Cl}_{\alpha X}(\mathrm{Fr}_X U) = \mathrm{Fr}_{\alpha X}(\mathrm{Ext}_{\alpha X} U)$ が成立するときをいう．但し，$\mathrm{Ext}_{\alpha X} U$ は $O \cap X = U$ となる αX の開集合 O のうち最大の開集合である．すなわち，$\mathrm{Ext}_{\alpha X} U = \alpha X \setminus \mathrm{Cl}_{\alpha X}(X \setminus U)$ である．さらに, Sklyarenko は以下のことを示した (cf. [12, 定理 30.8, 30.10], [15])．

命題 2.1. [15, E.G. Sklyarenko] コンパクトでない完全正則空間 X に対して，以下は同値である．

(1) αX は X の完全コンパクト化.

(2) $\alpha X \setminus X$ のどの点でも αX を局所的に分離しない[3].

(3) X における任意の開集合 U と U における任意の部分集合 A に対して，$\mathrm{Cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{Cl}_{\alpha X}(\mathrm{Fr}_X U) = \emptyset$ であれば $\mathrm{Cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{Cl}_{\alpha X}(X \setminus U) = \emptyset$.

(4) X の互いに素な開集合 U, V に対して，$\mathrm{Ext}_{\alpha X}(U \cup V) = (\mathrm{Ext}_{\alpha X} U) \cup (\mathrm{Ext}_{\alpha X} V)$.

(5) 自然な射影 $f : \beta X \to \alpha X$ おいて, 任意の $p \in \alpha X$ に対して，$f^{-1}(p)$ は連結である.

本節では，Charalambous の結果を受け, Woods の提示した問題を次のように一般化したものを考える．

問題 2.2. 距離空間の Smirnov コンパクト化が完全であるための必要十分条件を求めよ．

[3] X の部分集合 A が点 $a \in A$ で X を局所的に分離するとは，a の X におけるある開近傍 W に対して $X \setminus A$ の空でない開集合 U, V があって $W \cap (X \setminus A) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $\mathrm{Cl}_X U \cap \mathrm{Cl}_X V \ni a$ となるときをいう．

上記の問題に対して，局所連結でプロパーな距離空間において Charalambous の結果を含む完全解を与える．

定義 2.3. (1) ([14, Exercise 8.42]) 距離空間 (X,d) が一様局所連結であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x,y) < \delta$ を満たす $x, y \in X$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x, y \in P$ かつ $\operatorname{diam} P < \varepsilon$ となるものが存在する．

(2) 距離空間 (X,d) が ∞ で一様局所連結であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ と X のコンパクト集合 K_ε が存在して，$d(x,y) < \delta$ を満たす $x, y \in X \setminus K_\varepsilon$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x, y \in P$ かつ $\operatorname{diam} P < \varepsilon$ となるものが存在する．

次の定理は距離空間 (X,d) の Smirnov コンパクト化 $u_d X$ が完全であることの十分条件を与えている．

定理 2.4. (X,d) を距離空間とする．このとき，(X,d) が ∞ で一様局所連結であれば，Smirnov コンパクト化 $u_d X$ は完全である．

証明. 簡単のため，$Y = u_d X$ とおく．U を X の開集合とし，$W_0 = \mathrm{Cl}_X U$, $W_1 = X \setminus U$, $V = X \setminus W_0$ とおく．完全コンパクト化の定義より，$\mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U = \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ であることを示す．一般に $\mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U \subset \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ であるので, $\mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U \supset \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ を示せば十分である．

まず，$V = \emptyset$ の場合，すなわち, $X = \mathrm{Cl}_X U$ の場合を考える．もし，$x \in \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U \setminus \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ が取れたと仮定すると, x の Y における開近傍 W で $W \cap \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U = \emptyset$ を満たすものが取れる．しかし，$W \cap (Y \setminus \mathrm{Ext}_Y U) \neq \emptyset$ かつ $Y \setminus \mathrm{Ext}_Y U = \mathrm{Cl}_Y(X \setminus U) = \mathrm{Cl}_Y(\mathrm{Cl}_X U \setminus U) = \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ であることより, $W \cap \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U \neq \emptyset$ となり，W の取り方に矛盾する．ゆえに，$V = \emptyset$ の場合は $\mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U = \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ となる．

次に，$V \neq \emptyset$ の場合を考える．最初に，次の事実を示す．

事実. $\mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) = \mathrm{Cl}_Y W_0 \cap \mathrm{Cl}_Y W_1$.

一般に $\mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) \subset \mathrm{Cl}_Y W_0 \cap \mathrm{Cl}_Y W_1$ は常に成立するので，$\mathrm{Cl}_Y W_0 \cap \mathrm{Cl}_Y W_1 \setminus \mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く．$p \in \mathrm{Cl}_Y W_0 \cap \mathrm{Cl}_Y W_1 \setminus \mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1)$ を取ると, p の Y におけるある閉近傍 S で，$S \cap \mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) = \emptyset$ かつ各 $i = 0, 1$ に対して $S \cap W_i \neq \emptyset$ を満たすものが取れる．ここで，各 $i = 0, 1$ に対して $p \in \mathrm{Cl}_Y(W_i \cap S)$ であることから，$\mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap S) \cap \mathrm{Cl}_Y(W_1 \cap S) \neq \emptyset$ であることが従う．この結果，命題 1.1 より, $d(W_0 \cap S, W_1 \cap S) = 0$ となる．これより，ある点列 $\{x_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0 \cap S \subset U$, $\{x_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_1 \cap S \subset V$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $d(x_{0,n}, x_{1,n}) < \frac{1}{n}$ を満たすものが取れる．このとき，(X,d) が ∞ で一様局所連結であることから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，X のある連結な部分集合 P_n で $x_{0,n}, x_{1,n} \in P_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} P_n = 0$ となるものが取れるものとしてよ

い．ここで，$U \cup V$ は連結ではないので，$P_n \cap (X \setminus (U \cup V)) \neq \emptyset$ である．また，$X \setminus (U \cup V) = W_0 \cap W_1$ であるので，$P_n \cap (W_0 \cap W_1) \neq \emptyset$ である．これより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $y_n \in P_n \cap (W_0 \cap W_1)$ をとると，各 $i = 0, 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} d(x_{i,n}, y_n) = 0$ であるので $d(W_0 \cap W_1, W_i \cap S) = 0$ が従う．これと命題 1.1 より，各 $i = 0, 1$ に対して $\mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) \cap \mathrm{Cl}_Y(W_i \cap S) \neq \emptyset$ となるので，$\mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) \cap S \neq \emptyset$ となり，S の取り方に矛盾する．以上により，事実は示された．

ここで，$\mathrm{Ext}_Y U = Y \setminus \mathrm{Cl}_Y W_1$, $\mathrm{Ext}_Y V = Y \setminus \mathrm{Cl}_Y W_0$ と上の事実より，$Y \setminus (\mathrm{Ext}_Y U \cup \mathrm{Ext}_Y V) = \mathrm{Cl}_Y(W_0 \cap W_1) = \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ となり $Y = \mathrm{Ext}_Y U \cup \mathrm{Ext}_Y V \cup \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ となる．ここで，$x \in \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ を取る．もし，$x \in \mathrm{Ext}_Y U$ であるとすると $x \notin \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ となり矛盾となる．次に，$x \in \mathrm{Ext}_Y V$ と仮定すると $\mathrm{Ext}_Y U \cap \mathrm{Ext}_Y V \neq \emptyset$ となり，$\mathrm{Ext}_Y U \cap \mathrm{Ext}_Y V = \emptyset$ である事実に反する．これより，$x \in \mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U$ となり $\mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U \supset \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ であることが示された．ゆえに，$u_d X$ は X の完全コンパクト化である． □

ノルム線形空間における任意のコンパクトでない凸部分空間は ∞ で一様局所連結であるので，上記の定理より Charalambous の結果が系として得られることになる．

系 2.5. [6, M.G. Charalambous] X をノルム線形空間におけるコンパクトでない凸部分空間とし，d をその部分距離とする．このとき，(X, d) の Smirnov コンパクト化 $u_d X$ は完全コンパクト化である．特に，$(\mathbb{R}^n, d_n)$ の Smirnov コンパクト化 $u_{d_n}\mathbb{R}^n$ は完全コンパクト化である．

任意のコンパクトでない局所コンパクト可分距離化可能空間はプロパーな距離により位相を誘導できる (cf. [11])．次の定理は，局所連結かつプロパーな距離空間のクラスにおいて，その距離での Smirnov コンパクト化が完全であることの必要十分条件を与えている．

定理 2.6. (X, d) をコンパクトでない局所連結かつプロパーな距離空間とする．このとき，$u_d X$ が X の完全コンパクト化である必要十分条件は X が ∞ で一様局所連結であることである．

証明. X が σ-コンパクトなので，コンパクト部分集合の単調増加列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $K_n \subset \mathrm{Int}_X K_{n+1}$ でありかつ $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ となるものが取れる．定理 2.4 より，$u_d X$ が完全であるとき (X, d) が ∞ で一様局所連結であることを示せばよい．ここでは背理法により証明する．X が ∞ で一様局所連結でないと仮定する．このとき，ある $\varepsilon > 0$ で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある 2 点 $x_n, y_n \in X \setminus K_n$ が存在し $d(x_n, y_n) < 1/n$ かつ x_n と y_n を結ぶ全ての連結集合 P に対して $\operatorname{diam} P \geq \varepsilon$ を満たす．ここで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$B_\varepsilon(\{x_n, y_n\}, d) \subset K_{n+1} \setminus K_n$ と仮定してもよい．次に, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して C_n を以下のように定める．

$$C_n = \{y \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d) : x_n \text{ と } y \text{ は } B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d) \text{ の同じ連結集合に属する }\}.$$

このとき，$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ とおくと $U \cap \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$ となることに気付く．また，X は局所連結なので，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，C_n は X の開集合となっている．これより，U は X の開集合となり，さらに $\{\mathrm{Fr}_X C_n : n \in \mathbb{N}\}$ が離散集合族であるので，$\mathrm{Fr}_X U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fr}_X C_n$ となる．$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくと $d(A, X \setminus U) \le d(A, \{y_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ であるので，命題 2.1 より，$d(A, \mathrm{Fr}_X U) \ge \frac{\varepsilon}{3}$ であることを示せばよい．ここで，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \ge N$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Fr}_X C_n = \emptyset$ であったとする．このとき，$\mathrm{Fr}_X U = \bigcup_{n<l} \mathrm{Fr}_X C_n$ であるから，$\mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Cl}_{u_dX}(\mathrm{Fr}_X U) = \mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Fr}_X U = \emptyset$ となる．この結果，命題 2.1 より，u_dX は完全コンパクト化でないことになり仮定に反する．これより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{Fr}_X C_n \neq \emptyset$ としてよい．このとき，$\mathrm{Fr}_X C_n \subset \mathrm{Cl}_X B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d)$ であるので，次の事実を示す．

事実. $\mathrm{Fr}_X C_n \subset E_n = \{y \in X : d(x_n, y) = \frac{\varepsilon}{3}\}$.

そうでないと仮定し，$x \in \mathrm{Fr}_X C_n \setminus E_n$ を取る．このとき，X が局所連結であることから，x の $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d)$ に含まれる連結な近傍 W が取れる．ここで，$x \in \mathrm{Fr}_X C_n$ なので，任意の $z \in W \cap C_n$ に対して，z と x_n を含む $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d)$ におけるある連結集合 C が存在する．このとき，x と x_n は $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_n, d)$ における連結な部分集合 $W \cup C$ に含まれることになり，これは $x \in C_n$ を意味する．しかし，C_n は開集合なので $x \notin \mathrm{Fr}_X C_n$ となり矛盾である．

この事実により，$d(A, \mathrm{Fr}_X U) \ge \frac{\varepsilon}{3}$ であることが分かり，$\mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Cl}_{u_dX} \mathrm{Fr}_X U = \emptyset$ が従う．この結果，命題 2.1 より u_dX は完全でないということになり仮定に反する． □

次の補題は一様局所連結性と ∞ で一様局所連結性が同値となる空間のクラスを示している．

補題 2.7. (X, d) を局所コンパクトな距離空間とする．このとき，(X, d) が局所連結かつ ∞ で一様局所連結であることと一様局所連結であることは同値である．

証明. 一様局所連結であれば局所連結かつ ∞ で一様局所連結であることは直ちに従うので，逆を示せばよい．そこで $\varepsilon > 0$ を与えると，X が ∞ で一様局所連結であるので X のあるコンパクト集合 K と $\delta_0 > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X \setminus K$ に対して，$d(x, y) < \delta_0$ であれば, ある連結な集合 P で $x, y \in P$ かつ $\mathrm{diam}\, P < \varepsilon$ を満たす．ここで，$K_1 = \mathrm{Cl}_X B_{\delta_0}(K, d)$ とおくと K_1 はコンパクトであり，X が局所連結であることから，ある連結な開集合 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ で $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ かつ $\max\{\mathrm{diam}\, U_i : 1 \le i \le n\} < \varepsilon$ を満たすものが取れる．ここで，$\delta_1 > 0$ を K_1 と

$\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, \ldots, n\}$ に対する Lebesgue 数とする．$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ とおき，$d(x,y) < \delta$ を満たしている $x, y \in X$ を取る．もし $x \in K$ ならば，$x, y \in K_1$ となり，δ が先に定めた Lebesgue 数より小さいことから，ある i が存在して $x, y \in U_i$ となり，一様局所連結であることの条件を満たす．また，もし $x, y \in X \setminus K$ ならば，K の取り方より，一様局所連結であることの条件は満たしている． □

定理 2.6 と補題 2.7 より次の系が得られる．

系 2.8. (X, d) をコンパクトでない局所連結でプロパーな距離空間とする．このとき，以下は同値である．

(1) $u_d X$ は完全コンパクト化である．

(2) (X, d) は ∞ で一様局所連結である．

(3) (X, d) は一様局所連結である．

次の例は，局所連結性と ∞ で一様局所連結性は関係がないことを示している．

例 2.9. (1) $n \in \mathbb{N}$ とする．$X_0 = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 \geq 0\}$, $X_1 = \{(0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq x_{n+1} \leq 1\}$, $X_2 = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 \geq 0, x_{n+1} = 2^{-x_1}\}$ とし $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ と定め X 上の距離 d は $\mathbb{R}^{n+1}$ の通常の距離から誘導される部分距離とする．ここで，(X, d) は $\mathbb{R}^n$ と同相なので局所連結であるが，∞ で一様局所連結でない．したがって，定理 2.6 から $u_d X$ は完全コンパクト化ではない．

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$Y_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : n \leq x \leq n + 2^{-n}$ かつ $y = 2^{-m}, m \in \mathbb{N}\} \cup \{n\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ とおき，$Y = [0, \infty) \times \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \subset \mathbb{R}^2$ とおく．また，Y 上の距離は $\mathbb{R}^2$ の通常の距離から誘導される部分距離 ρ とする．このとき，(Y, ρ) は ∞ で一様局所連結であるが局所連結ではない．一方，定理 2.4 より $u_\rho Y$ は完全コンパクト化である．

次の問題は未解決である．

問題 2.10. 局所連結でなく，∞ で一様局所連結でないプロパーな距離空間 (X, d) で $u_d X$ が X の完全コンパクト化であるような空間 X は存在するか？

Smirnov コンパクト化とは別に距離に依存するコンパクト化として Higson コンパクト化が知られている．これまでの議論と類似した方法で，Higson コンパクト化が完全であるための特徴付けが与えられる．まず，Higson コンパクト化の定

義を与えておく．(X,d), (Y,ρ) を距離空間とし，連続写像 $f:X\to Y$ が任意の $r>0$ に対して次の条件をみたすとき，$(*)_d$ の条件を満たすという．

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{diam}_\rho f(B_r(x,d))=0 \quad \cdots\cdots \quad (*)_d$$

すなわち，任意の $r>0$ と $\varepsilon>0$ に対して，あるコンパクト集合 $K=K_{r,\varepsilon}$ が存在して，$x\in X\setminus K$ であれば，$\operatorname{diam}_\rho f(B_r(x,d))<\varepsilon$ を満たす．ここで，$C_d^*(X)$ を $(*)_d$ の条件を満たす X 上の実数値有界連続関数全体とする．(X,d) がプロパーな距離空間であるとき，$C_d^*(X)$ は定値関数を含み，$C^*(X)$ に一様収束位相を入れた中で閉部分環となっている．このとき，$C_d^*(X)$ から生成されたコンパクト化を Higson コンパクト化といい，$\overline{X}^d$ で表す．これも，距離に依存するコンパクト化である．次に，Higson コンパクト化の特徴付けを与える．プロパーな距離空間 (X,d) の部分集合族 $\{E_1,\ldots,E_n\}$ が発散しているとは，任意の $r>0$ に対して，$\bigcap_{i=1}^n B_r(E_i,d)$ が有界集合であるときをいう．これより，$\{E_1,\ldots,E_n\}$ が発散していることと $\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^n d(x,E_i)=\infty$ であることは同値である．すなわち，任意の $N>0$ に対して，あるコンパクト集合 $K=K_N$ が存在して，$x\in X\setminus K$ であるならば $\sum_{i=1}^n d(x,E_i)>N$ を満たすということである．これより，Higson コンパクト化は次のように特徴付けられる．

命題 2.11. [7, Proposition 2.3] (X,d) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．このとき，次は同値である．

(1) $\alpha X\approx\overline{X}^d$ である．

(2) X の互いに素な閉集合 A, B に対して，$\mathrm{Cl}_{\alpha X}A\cap\mathrm{Cl}_{\alpha X}B=\emptyset$ であることと $\{A,B\}$ が発散していることは同値である．

まず，一様局所連結性の概念を Higson コンパクト化に対応した概念に変更したものを考える．

定義 2.12. (1) 距離空間 (X,d) が粗一様連結であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，$d(x,y)<\varepsilon$ を満たす $x,y\in X$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\delta$ となるものが存在する．
(2) 距離空間 (X,d) が ∞ で粗一様連結であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ と X のコンパクト集合 K_ε が存在して，$d(x,y)<\varepsilon$ を満たす $x,y\in X\setminus K_\varepsilon$ に対して，X のある連結な部分集合 P で $x,y\in P$ かつ $\operatorname{diam}P<\delta$ となるものが存在する．

次の定理は，プロパーな距離空間 (X,d) の Higson コンパクト化 $\overline{X}^d$ が完全であることの十分条件を与えている．

定理 2.13. (X,d) をプロパーな距離空間とする．このとき，(X,d) が ∞ で粗一様連結であれば，$\overline{X}^d$ は完全コンパクト化である．

証明．簡単のため，$Y=\overline{X}^d$ とおく．ここで，U, V, W_0, W_1 は定理 2.4 と同様に定める．完全コンパクト化の定義より，$\mathrm{Cl}_Y \mathrm{Fr}_X U \supset \mathrm{Fr}_Y \mathrm{Ext}_Y U$ を示せば十分である．$V=\emptyset$ の場合は定理 2.4 と全く同様にできるので $V\neq\emptyset$ の場合を考えればよい．さらに，$\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)=\mathrm{Cl}_Y W_0\cap\mathrm{Cl}_Y W_1$ を示せばあとの証明は定理 2.4 と同様にしてできるので，この等式のみ証明すればよい．$\mathrm{Cl}_Y W_0\cap\mathrm{Cl}_Y W_1\setminus\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)\neq\emptyset$ と仮定し，$p\in\mathrm{Cl}_Y W_0\cap\mathrm{Cl}_Y W_1\setminus\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)$ を取る．このとき，p の Y における閉近傍 S で，$S\cap\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)=\emptyset$ かつ各 $i=0,1$ に対して $S\cap W_i\neq\emptyset$ を満たすものが取れる．$\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap S)\cap\mathrm{Cl}_Y(W_1\cap S)\neq\emptyset$ であるので，命題 2.11 より，$\{W_0\cap S, W_1\cap S\}$ は発散していない．従って，ある $\varepsilon>0$ とコンパクト集合からなる X の被覆 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $B_\varepsilon(K_n,d)\subset\mathrm{Int}_X K_{n+1}$ かつ $d(x_n,W_0\cap S)+d(x_n,W_1\cap S)<\varepsilon$ を満たす $x_n\in X\setminus\mathrm{Cl}_X B_\varepsilon(K_n,d)$ が取れる．ここで，d がプロパーであることから，ある点列 $\{x_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W_0\cap S\subset U$, $\{x_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W_1\cap S\subset V$ で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d(x_n,W_0\cap S)+d(x_n,W_1\cap S)=d(x_n,x_{0,n})+d(x_n,x_{1,n})$ を満たすものが取れる．このとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d(x_{0,n},x_{1,n})<\varepsilon$ かつ $x_{0,n}$, $x_{1,n}\notin K_n$ となっていることと，(X,d) が ∞ で粗一様連結であることから，ある $\delta>0$ と $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ である任意の自然数 n に対して X のある連結な部分集合 P_n で $x_{0,n},x_{1,n}\in P_n$ かつ $\mathrm{diam}\,P_n<\delta$ となるものが取れる．ここで，$U\cup V$ は連結ではないので，$P_n\cap(X\setminus(U\cup V))\neq\emptyset$ となり，$P_n\cap(W_0\cap W_1)\neq\emptyset$ が成り立つ．従って，$y_n\in P_n\cap(W_0\cap W_1)$ をとると，各 $i=0,1$ に対して $d(x_{i,n},y_n)<\delta$ であるので, $\{W_0\cap W_1, W_i\cap S\}$ は発散していないことが分かる．これと命題 2.11 より，各 $i=0,1$ に対して，$\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)\cap\mathrm{Cl}_Y(W_i\cap S)\neq\emptyset$ となるので $\mathrm{Cl}_Y(W_0\cap W_1)\cap S\neq\emptyset$ となり，S の取り方に矛盾する．以上により等式は示され，先に注意したことから，$\overline{X}^d$ は X の完全コンパクト化となる． □

次に，局所連結かつプロパーな距離空間のクラスにおいて，その距離での Higson コンパクト化が完全であることの必要十分条件を与える．

定理 2.14. (X,d) をコンパクトでない局所連結かつプロパーな距離空間とする．このとき，$\overline{X}^d$ が X の完全コンパクト化である必要十分条件は X が ∞ で粗一様連結であることである．

証明．定理 2.13 より必要性のみ示せば十分である．X が ∞ で粗一様連結でないと仮定する．$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をコンパクト部分集合からなる X の被覆で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d(K_n,\mathrm{Cl}_X(X\setminus K_{n+1}))>2n$ を満たすものとする．このとき，ある $\varepsilon>0$ で, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある 2 点 $x_n,y_n\in X\setminus K_n$ が存在し $d(x_n,y_n)<\varepsilon$ かつ x_n と y_n を結ぶ全ての連結集合 P に対して $\mathrm{diam}\,P\geq n$ を満たす．一般性を失

うことなく, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $B_n(\{x_n,y_n\},d)\subset K_{n+1}\setminus K_n$ と仮定してもよい. ここで, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して C_n を以下のように定める.

$$C_n=\{y\in B_{\frac{n}{3}}(x_n,d):x_n \text{ と } y \text{ は } B_{\frac{n}{3}}(x_n,d) \text{ の同じ連結集合に属する }\}.$$

このとき, $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$ とおくと $U\cap\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\emptyset$ となることに気付く. また, X は局所連結なので, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, C_n は X の開集合となっている. これより, U は X の開集合となり, さらに $\{\mathrm{Fr}_X C_n:n\in\mathbb{N}\}$ が離散集合族であるので, $\mathrm{Fr}_X U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Fr}_X C_n$ となる. ここで, $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ とおくと $\{A,\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ が発散していないことから $\{A,X\setminus U\}$ は発散していない. この結果, 命題 2.1 より, $\{A,\mathrm{Fr}_X U\}$ が発散していることを示せばよい. ここで, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ である $n\in\mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Fr}_X C_n=\emptyset$ であったとする. このときは定理 2.6 の証明と同様にして $\overline{X}^d$ は完全コンパクト化でないことがわかり仮定に反する. これより, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{Fr}_X C_n\neq\emptyset$ としてよい. また, 定理 2.6 の事実を示したときと同様にして $\mathrm{Fr}_X C_n\subset E_n=\{y\in X: d(x_n,y)=\frac{n}{3}\}$ であることが示せるので, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d(A,\mathrm{Fr}_X C_n)\geq\frac{n}{3}$ となる. そこで $x\in X\setminus K_{3n+1}$ を任意に取る. もし $x\notin \mathrm{Cl}_X\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_{\frac{k}{3}}(x_k,d)$ ならば, $d(x,A)+d(x,\mathrm{Fr}_X U)\geq\min\{\inf\{d(x,x_k):k\geq 3n+1\},\inf\{d(x,x_k):k\leq 3n\}\}>n$ となることが分かる. 次に $x\in\mathrm{Cl}_X\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_{\frac{k}{3}}(x_k,d)$ とすると, ある $m\in\mathbb{N}$ で $m>3n$ かつ $x\in\mathrm{Cl}_X B_{\frac{m}{3}}(x_m,d)$ を満たしているものが取れる. このとき, $d(x,A)+d(x,\mathrm{Fr}_X U)=d(x,x_m)+d(x,\mathrm{Fr}_X C_m)\geq d(x_m,\mathrm{Fr}_X C_m)\geq\frac{m}{3}>n$ となる. 以上の結果 $\{A,\mathrm{Fr}_X U\}$ が発散することが示せたので, $\mathrm{Cl}_{\overline{X}^d}A\cap\mathrm{Cl}_{\overline{X}^d}\mathrm{Fr}_X U=\emptyset$ となる. ゆえに, 命題 2.1 より, $\overline{X}^d$ は完全コンパクト化でないことになり, 仮定に矛盾する. □

次の補題は, 粗一様連結性と ∞ で粗一様連結性が同値となる空間のクラスを示している.

補題 2.15. (X,d) をコンパクトでない局所連結で局所コンパクトな距離空間とする. このとき, (X,d) が粗一様連結であることと連結かつ ∞ で粗一様連結であることは同値である.

証明. (X,d) が粗一様連結であれば連結かつ ∞ で粗一様連結であることは明らかなので, 逆を示せばよい. そこで $\varepsilon>0$ を与えると X が ∞ で粗一様連結であるので X のあるコンパクト集合 K と $\delta_0>0$ が存在して, 任意の $x,y\in X\setminus K$ に対して, $d(x,y)<\varepsilon$ であれば, ある連結な集合 P で $x,y\in P$ かつ $\mathrm{diam}\,P<\delta_0$ を満たす. ここで, X が局所連結かつ局所コンパクトなので, ある連続体[4] $K_1,K_2,\ldots,K_n$ で $\mathrm{Cl}_X B_\varepsilon(K,d)\subset\bigcup_{i=1}^n K_i$ を満たすものが取れる. 次に $z\in X\setminus K$ を一つ固定し, $L(z)$ を以下のように定める.

$$L(z)=\{\,p\in X\mid p \text{ と } z \text{ を含む } X \text{ のある連続体が存在する}\}.$$

[4]空間が連続体というのは, その空間がコンパクトかつ連結であるときをいう.

このとき，X が局所連結かつ局所コンパクトなので $L(z)$ は開かつ閉集合となり，X が連結であることから，$L(z) = X$ となる．これより，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，X の部分連続体 L_i で $z \in L_i$ かつ $L_i \cap K_i \neq \emptyset$ を満たすものが取れる．そこで，$K' = \bigcup_{i=1}^{n}(K_i \cup L_i)$ とおくと K' はコンパクトかつ連結となる．ここで，$\delta = \max\{\operatorname{diam} K', \delta_0\}$ とおき，$d(x, y) < \varepsilon$ を満たす $x, y \in X$ を任意に取る．もし $x \in K$ であれば，$x, y \in K'$ となりかつ $\operatorname{diam} K' < \delta$ を満たしている．また，$x, y \in X \setminus K$ である場合は K と δ の取り方より，粗一様連結であることの条件は満たしている． □

定理 2.14 と補題 2.15 より次の系が直ちに従う．

系 2.16. (X, d) をコンパクトでない局所連結かつ連結でプロパーな距離空間とする．このとき，以下は全て同値である．

(1) $\overline{X}^d$ は完全コンパクト化である．

(2) (X, d) は ∞ で粗一様連結である．

(3) (X, d) は粗一様連結である．

以下で幾つかの例を挙げておく．

例 2.17. (1) $X = [0, \infty) \times \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{2^n\} \times [0, 1]$ とおき，$\mathbb{R}^2$ の通常の距離から生成された部分距離 d を持つものとする．このとき，(X, d) は局所連結であるが ∞ で粗一様連結でないので，定理 2.14 より $\overline{X}^d$ は完全コンパクトでない．

(2) $Y = [0, \infty) \times \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{n\} \times [0, 1]$ とおき，$\mathbb{R}^2$ の通常の距離から生成された部分距離 ρ を持つものとする．このとき，(X, ρ) は局所連結であり ∞ で粗一様連結であるので，定理 2.13 より $\overline{Y}^\rho$ は完全コンパクトである．

3 Smirnov コンパクト化の剰余の帰納的次元

定理 1.4 より，任意のコンパクトでない距離空間 (X, d) に対して $\dim u_d X \setminus X = \dim^\infty(X, d)$ であることが知られている．しかし，Smirnov コンパクト化の剰余は一般に距離化可能でないので，上記の結果から直ちに $\operatorname{Ind} u_d X \setminus X$ や $\operatorname{ind} u_d X \setminus X$ の値は分からない状況にある．また，問題 1.5 は一般的すぎるので，まずユークリッド空間の Smirnov コンパクト化の剰余の帰納的次元を計算することがこの問題を解決するための第一歩と考えられる．

問題 3.1. ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_n)$ の Smirnov コンパクト化の剰余 $u_{d_n}\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ に対して，その帰納的次元 $\operatorname{Ind} u_{d_n}\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ と $\operatorname{ind} u_{d_n}\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ を計算せよ．

X を位相空間とし，A, B を X において互いに素な部分集合とする．このとき，$L \subset X$ が A と B を分離するとは，開集合 U, $V \subset X$ で次の条件を満たすものが存在するときをいう．

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad \text{かつ} \quad X \setminus L = U \cup V$$

明らかに, 上記 L は X における閉集合である．次に，正規空間 X において $\operatorname{Ind} X \leq n (\geq 0)$ であるとは，X における任意の互いに素な閉集合の組 A, B に対して，A と B を分離する L で $\operatorname{Ind} L \leq n-1$ となるものが取れるときをいう．このとき，Lindelöff 空間 X においては $\operatorname{ind} X = 0$, $\operatorname{Ind} X = 0$ と $\dim X = 0$ は互いに同値であることは良く知られており (cf. [8, 7.1.11])，さらに，任意の正規空間 X において $\operatorname{Ind} X \geq \max\{\dim X, \operatorname{ind} X\}$ が成立する (cf. [9, 1.6.3 and 3.1.28])．

次は基本的である．

補題 3.2. (X, d) と (Y, ρ) をコンパクトでない距離空間とし，$f : Y \to X$ は閉写像とし，Y と $f(Y)$ は一様同値であるとする．このとき，以下が成立する．

(1) $u_\rho Y \setminus Y$ は $u_d X \setminus X$ に埋め込まれる．

(2) (Y_1, d_1) がコンパクト距離空間，(Y_2, d_2) は距離空間とする．このとき，(Y, ρ) が $(Y_1 \times Y_2, d_1 + d_2)$ と一様同値ならば，Y_1 は $u_d X \setminus X$ に埋め込まれる．

証明．(1) [18, Theorem 2,9, 2.10] より直ちに従う．

(2)(1) より，$u_\rho Y \setminus Y$ は $u_d X \setminus X$ に埋め込まれており，Y_1 はコンパクト距離空間でかつ Y は $Y_1 \times Y_2$ と一様同値であるので，[18, Theorem 2.10, 3.6] より，$u_\rho Y$ は $Y_1 \times u_{d_2} Y_2$ と同値である．ゆえに，$u_\rho Y \setminus Y$ は $Y_1 \times (u_{d_2} Y_2 \setminus Y_2)$ と同相であるので, Y_1 は $u_d X \setminus X$ に埋め込まれていることが分かる．$\square$

$n \geq k \geq 0$ を満たす n, $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 Z_k^n を次のように定める．

$$Z_k^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\{i : x_i \in \mathbb{Z}\}| \geq n - k\}$$

このとき，Z_k^n は k 次元部分空間である．実際，$k = 0$, n のときはそれぞれ $Z_0^n = \mathbb{Z}^n$, $Z_n^n = \mathbb{R}^n$ である．$k \neq 0, n$ のときは，Z_k^n は $\mathbb{R}^k$ と同相な部分空間の可算和となっていることから, 被覆次元における可算和定理 [9, Theorem 3.1.8] より $\dim Z_k^n \leq k$ となる．一方，$\mathbb{R}^k$ が Z_k^n の中に閉集合として埋め込まれていることから $\dim Z_k^n = k$ が得られる．この k 次元部分空間を用いて次の補題を得る．

補題 3.3. $n \geq k \geq 0$ を満たす n, $k \in \mathbb{Z}$ に対して，Z_k^n 上の距離 d は $\mathbb{R}^n$ における通常の距離の部分距離とする．このとき，$\operatorname{Ind} u_d Z_k^n \setminus Z_k^n = k$ となる．

証明. [18, p.47] より，$d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(x_1',x_2',\ldots,x_n'))=\sum_{i=1}^n|x_i-x_i'|$ と仮定してよい．$n\geq k\geq 0$ を満たす任意の $n,\ k\in\mathbb{Z}$ に対して，$\mathrm{Ind}\,u_dZ_k^n\setminus Z_k^n=k$ であることを帰納法を用いて示す．まず，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して Z_0^n は 1-離散であるから $u_dZ_0^n\setminus Z_0^n$ は $\beta\mathbb{N}$ と同相となり，$\mathrm{Ind}\,u_dZ_0^n\setminus Z_0^n=0$ が従う．次に $n\in\mathbb{N}$ を固定し，$0\leq i<k\leq n$ を満たす任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して，$\mathrm{Ind}\,u_dZ_i^n\setminus Z_i^n=i$ が成立していると仮定する．このとき，$\mathrm{Ind}\,u_dZ_k^n\setminus Z_k^n=k$ であることを示せば帰納法より証明が完了することになる．まず，

$$Y_j=[0,1]^k\times\underbrace{(j,j,\ldots,j)}_{n-k}\subset Z_k^n \text{ かつ } Y=\bigcup_{j\geq 1}Y_j\subset Z_k^n.$$

とおくと，$[0,1]^k\times\mathbb{N}$ と Y は一様同値であるので，補題 3.2 より $[0,1]^k$ は $u_dZ_k^n\setminus Z_k^n$ に埋め込まれていることが分かる．この事実と [9, Theorem 2.2.1, p.134] から $\mathrm{Ind}\,u_dZ_k^n\setminus Z_k^n\geq k$ となることが分かる．次に $\mathrm{Ind}\,u_dZ_k^n\setminus Z_k^n\leq k$ であることを示す．A と B を互いに素な $u_dZ_k^n\setminus Z_k^n$ における閉集合とする．このとき，A と B を分離する $L'\subset u_dZ_k^n\setminus Z_k^n$ で $\mathrm{Ind}\,L'\leq k-1$ となるものが存在することを示せばよい．$u_dZ_k^n$ は正規であるので，$u_dZ_k^n$ における互いに素な開集合 U と V が存在し $A\subset U,\ B\subset V$ かつ $\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}V=\emptyset$ となり，命題 1.1 より，$\varepsilon=d(Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U,Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}V)>0$ が従う．このとき，$\frac{4n}{m}<\varepsilon$ を満たす $m\in\mathbb{N}$ を取り，$Z_k^{n,m}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:|\{i:mx_i\in\mathbb{Z}\}|\geq n-k\}$ とおく．さらに，$\Lambda=\{\mathrm{Cl}_{Z_k^n}C:C$ は $Z_k^n\setminus Z_{k-1}^{n,m}$ における連結成分$\}$ とし $W_0'=\bigcup\{D\in\Lambda: D\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U\neq\emptyset\}$，$W_0=\bigcup\{D\in\Lambda:D\cap W_0'\neq\emptyset\}$ とおくと W_0 は閉集合となる．ここで，$W_1=\mathrm{Cl}_{Z_k^n}(Z_k^n\setminus W_0)$，$L=W_0\cap W_1$ とおくと $L=\mathrm{Fr}_{Z_k^n}W_0=\mathrm{Fr}_{Z_k^n}W_1$ であることから，L は $Z_{k-1}^{n,m}$ に含まれている．また，任意の $D\in\Lambda$ に対して，$\mathrm{diam}\,D\leq\frac{n}{m}$ であることと $d(W_0',L)\geq\frac{1}{m}$ であることから，$\frac{1}{m}\leq d(L,Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U)\leq\frac{2n}{m}$ となる．ここで，ε の定義から，$d(L,Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}V)\}>\frac{2n}{m}$ であることが分かる．このとき，次の事実が成り立つ．

事実. $\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L=\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1$.

実際，$\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L\subset\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1$ であるので，逆の包含関係を示せば十分である．そこで，$x\in\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L$ を取る．$Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L=Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1$ であるので，$x\in u_dZ_k^n\setminus Z_k^n$ となることが分かる．また，$u_dZ_k^n$ が正規空間であることから $u_dZ_k^n$ における x の閉近傍 S で $S\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L=\emptyset$. となるものが取れる．このとき，各 $i=0,1$ に対して $W_i\cap S\neq\emptyset$ なので，$\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}(W_0\cap S)\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}(W_1\cap S)\neq\emptyset$ となり，命題 1.1 より，$d(W_0\cap S,W_1\cap S)=0$ が従う．この結果，$i=0,1$ に対して点列 $x_{i,0},x_{i,1},\ldots\in W_i\cap S$ で $\lim_{k\to\infty}d(x_{0,k},x_{1,k})=0$ を満たすものが取れる．ここで，各 $i=0,1$ に対して $x_{i,0},x_{i,1},\ldots\notin L$ としてよいので，任意の $i\in\mathbb{N}$ に対して Z_k^n における $x_{0,i}$ から $x_{1,i}$ を結ぶ弧 P_i で $\lim_{i\to\infty}\mathrm{diam}\,P_i=0$ を満たすものが取れる．$L=\mathrm{Fr}_{Z_k^n}W_0=\mathrm{Fr}_{Z_k^n}W_1$ であることから，任意の $i\in\mathbb{N}$ に対して，$y_i\in L\cap P_i$ が取れる．すると，$\lim_{i\to\infty}d(x_{0,i},y_i)=\lim_{i\to\infty}d(x_{1,i},y_i)=0$ であることから，$d(W_0\cap S,L)=d(W_1\cap S,L)=0$ が成立し，命題 1.1 から，各

$i=0,1$ に対して $\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}(W_i\cap S)\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L\neq\emptyset$ となり，$S\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L=\emptyset$ であることに反する．これにより，事実は証明された．

この事実により $L'=\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L\setminus L$ が A と B を分離していることを示せばよい．そこで，$W_0^*=\mathrm{Ext}_{u_dZ_k^n}(W_0\setminus L)=u_dZ_k^n\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1$, $W_1^*=\mathrm{Ext}_{u_dZ_k^n}(W_1\setminus L)=u_dZ_k^n\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0$，各 i に対して $W_i'=W_i^*\setminus Z_k^n$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}u_dZ_k^n\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}L&=u_dZ_k^n\setminus(\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1)\\&=(u_dZ_k^n\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0)\cup(u_dZ_k^n\setminus\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1)\\&=W_0^*\cup W_1^*\end{aligned}$$

であるから，$(u_dZ_k^n\setminus Z_k^n)\setminus L'=W_0'\cup W_1'$ となる．また，$\frac{1}{m}<d(L,Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U)\leq\frac{2n}{m}$ かつ $d(L,Z_k^n\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}V)>\frac{2n}{m}$ であることから，命題 1.1 より，$\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}U\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_1=\emptyset$ かつ $\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}V\cap\mathrm{Cl}_{u_dZ_k^n}W_0=\emptyset$ となり，$A\subset W_0'$ かつ $B\subset W_1'$ であることがわかる．以上の議論から，L' は A と B を分離している．$L\subset Z_{k-1}^{n,m}$ であるから，補題 3.2 より L' は $u_dZ_{k-1}^{n,m}\setminus Z_{k-1}^{n,m}$ に埋め込まれていることになる．さらに，$Z_{k-1}^{n,m}$ と Z_{k-1}^n は一様同値であることから，[9, Theorem 2.2.1, p.134] より，$\mathrm{Ind}\,L'\leq\mathrm{Ind}\,u_dZ_{k-1}^{n,m}\setminus Z_{k-1}^{n,m}=\mathrm{Ind}\,u_dZ_{k-1}^n\setminus Z_{k-1}^n\leq k-1$ が従い，[9, Propostion 1.6.2, p.40] から $\mathrm{Ind}\,u_dZ_k^n\setminus Z_k^n\leq k$ が示された． □

上の補題から次の定理が得られる．

定理 3.4. $n\in\mathbb{N}$ に対して，d_n を $\mathbb{R}^n$ の通常の距離とする．このとき，以下が成立する．

$$\mathrm{ind}\,u_{d_n}\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=\mathrm{Ind}\,u_{d_n}\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=\dim u_{d_n}\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=n$$

特に，以下も成り立つ．

$$\mathrm{ind}\,u_{d_n}[0,\infty)^n\setminus[0,\infty)^n=\mathrm{Ind}\,u_{d_n}[0,\infty)^n\setminus[0,\infty)^n=\dim u_{d_n}[0,\infty)^n\setminus[0,\infty)^n=n$$

証明．補題 3.2 (1) より，$u_{d_n}\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n$ と $u_{d_n}[0,\infty)^n\setminus[0,\infty)^n$ は $u_{d_n}Z_n^n\setminus Z_n^n$ に埋め込まれていることが分かる．ここで，X を $\mathbb{R}^n$ または $[0,\infty)^n$ とする．このとき，[9, Theorem 1.6.3, 2.2.2 and 3.1.28] と補題 3.3 より以下が得られる．

$$\max\{\mathrm{ind}\,u_{d_n}X\setminus X,\dim u_{d_n}X\setminus X\}\leq\mathrm{Ind}\,u_{d_n}X\setminus X\leq\mathrm{Ind}\,u_{d_n}Z_n^n\setminus Z_n^n=n.$$

さらに，$Y_k=[0,1]^{n-1}\times[2k,2k+1]$ とし，$Y=\bigcup_{k\geq1}Y_k$ と定める．このとき，Y と $[0,1]^n\times\mathbb{N}$ が一様同値であることから，補題 3.2 (2) より，$[0,1]^n$ は $u_{d_n}X\setminus X$ に埋め込まれていることが分かる．さらに，[9, Theorem 1.1.2, 3.1.3] より，

$$n\leq\min\{\mathrm{ind}\,u_{d_n}X\setminus X,\dim u_{d_n}X\setminus X\}\leq\mathrm{Ind}\,u_{d_n}X\setminus X$$

であることから $\mathrm{ind}\,u_{d_n}X\setminus X=\mathrm{Ind}\,u_{d_n}X\setminus X=\dim u_{d_n}X\setminus X=n$ が従う． □

定理 3.4 の応用として，局所コンパクト可分距離空間 X において，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，あるプロパーな距離 ρ_n で $\dim u_{\rho_n}X \setminus X = \mathrm{ind}\, u_{\rho_n}X \setminus X = \mathrm{Ind}\, u_{\rho_n}X \setminus X = n$ を満たすものが取れる．

補題 3.5. (X,d) と (Y,ρ) をコンパクトでないプロパーな距離空間とする．完全写像 $p : J = [0,\infty) \to Y$ で，$u_{\rho|_{p(J)}}p(J) \setminus p(J) \cong u_\rho Y \setminus Y$[5] となるようなものが存在すれば，$X$ 上のあるプロパーな距離 d_X で $u_{d_X}X \setminus X \cong u_\rho Y \setminus Y$ となるようなものが存在する．

証明．点 $x_0 \in X$ を固定する．このとき，$f : X \to [0,\infty)$ を $f(x) = d(x,x_0)$ と定めると d がプロパーであることから，f は完全全写像でかつ全射となる．このとき，$g = p \circ f : X \to Y$ も完全写像となる．ωX を X の一点コンパクト化とし，集合としては $\omega X = X \cup \{\infty\}$ とみなす．$G : X \to \omega X \times Y$ を $G(x) = (x, g(x))$ と定めると明らかに G は埋め込みであり，次が成立する．

事実 1. G は閉写像である．

A を X の閉集合とする．いま，$\mathrm{Cl}_{\omega X\times Y}\, G(A) \setminus G(A) \neq \emptyset$ と仮定して，点 $(x,y) \in \mathrm{Cl}_{\omega X\times Y}\, G(A) \setminus G(A)$ を取る．もし $x \in X$ とすると，ある点列 $\{(x_n, g(x_n))\}_{n\in\mathbf{N}} \subset G(A)$ で $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は x に収束し，$\{g(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は y に収束するものが取れる．このとき，A は閉集合であるので，$x \in A$．さらに，g は連続であるので，$g(x) = y \in g(A)$ となり，$(x,y) = (x, g(x)) \in G(A)$ となって矛盾が生じる．次に，もし $x = \infty$ とすると，ある点列 $\{(x_n, g(x_n))\}_{n\in\mathbf{N}} \subset G(A)$ で $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は ∞ に収束し，$\{g(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は y に収束するものが取れる．$S = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とおくと g は完全写像であることから，$g(S)$ は有界でなく $\lim_{n\to\infty}\rho(g(x_n), y) = \infty$ となり，矛盾である．ゆえに，$G(A)$ は閉集合である．

次に，$d_{\omega X}$ を ωX 上の距離とし，任意の $(x,y),(x',y') \in \omega X \times Y$ に対して，$\sigma((x,y),(x',y')) = d_{\omega X}(x,x') + \rho(y,y')$ と定める．ここで，任意の $x, x' \in X$ に対して，$d_X(x,x') = \sigma((x,g(x)),(x',g(x')))$ と定めると d_X は X 上の距離となる．Y は σ-コンパクトであることから，Y のコンパクトな被覆 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_1(K_n, d) \subset \mathrm{Int}_Y K_{n+1}$ となるものが存在する．このとき，次の事実を証明する．

事実 2. (1) $\lim_{n\to\infty}\sup\{\sigma(z, G(X)) : z \in \{\infty\}\times p(J) \setminus \omega X \times K_n\} = 0$.
(2) $\lim_{n\to\infty}\sup\{\sigma(z, \{\infty\}\times p(J)) : z \in G(X) \setminus \omega X \times K_n\} = 0$.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $N_n \in \mathbb{N}$ で $g(X \setminus B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X})) \subset K_{N_n}$ となるものが存在する．最初に (1) を示す．点 $z = (\infty, p(t)) \notin \omega X \times K_m$ に対し，$m \geq N_n$ と仮定してよいので，$g(X \setminus B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X})) \subset K_{N_n} \subset K_m$ となる．$p(t) \notin K_m$ であることから，$p(t) \notin g(X \setminus B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X}))$ となり，$p(t) \in g(B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X})) = p \circ f(B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X}))$ となる．これより，ある $x \in B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X})$ で $t = f(x)$ となるものが存在し，$p(t) = g(x) \in g(B_{\frac{1}{n}}(\infty, d_{\omega X}))$ を満たす．ここで，$(x, g(x)) \in G(X)$

[5]本稿では，一般に位相空間 S と T が同相であることを $S \cong T$ と表す．

かつ $\sigma(z, G(X)) \leq \sigma(z, (x, g(x))) = d_{\omega X}(\infty, x) < \frac{1}{n}$ であるので，(1) が示された．次に，(2) を示す．$z = (x, g(x)) \in G(X) \setminus \omega X \times K_m$ を取る．このとき，$m \geq N_n$ と仮定してよい．ここで，$t = f(x) \in J$ とすると，$p(t) = g(x)$ かつ $\sigma(z, \{\infty\} \times p(J)) \leq \sigma(z, (\infty, p(t))) = d_{\omega X}(x, \infty) < \frac{1}{n}$ より，(2) も示された．

ここで，[18, Theorem 2.9, 2.10], 事実 2 と [18, Theorem 4.2] を順に適用することで次のことが分かる．

$$\begin{aligned} u_{d_X}X \setminus X &\cong \mathrm{Cl}_{u_\sigma \omega X \times Y} G(X) \setminus G(X) \\ &= \mathrm{Cl}_{u_\sigma \omega X \times Y}(\{\infty\} \times p(J)) \setminus (\{\infty\} \times p(J)) \end{aligned}$$

さらに，[18, Theorem 2.9], [18, Theorem 2.10] を順に適用することで次を得る．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cl}_{u_\sigma \omega X \times Y}(\{\infty\} \times p(J)) \setminus (\{\infty\} \times p(J)) \\ \cong\ & u_{\sigma|_{\{\infty\} \times p(J)}}(\{\infty\} \times p(J)) \setminus (\{\infty\} \times p(J)) \\ \cong\ & u_{\rho|_{p(J)}} p(J) \setminus p(J) \\ \cong\ & u_\rho Y \setminus Y. \end{aligned}$$

この結果，$u_{d_X}X \setminus X \cong u_\rho Y \setminus Y$ となることが示せた． □

このとき，自然と次の問題が持ち上がる．

問題 3.6. あるプロパーな距離空間 (X, ρ) で $u_\rho X \setminus X$ が連結かつどんな $[0, \infty)$ 上の距離 d に対しても $u_d[0, \infty) \setminus [0, \infty)$ と $u_\rho X \setminus X$ が同相でないようなものが存在するか？

完全写像 $p : J = [0, \infty) \to [0, \infty)^n$ で $u_{\rho|_{p(J)}} p(J) \setminus p(J)$ と $u_\rho[0, \infty)^n \setminus [0, \infty)^n$ が同相となるものが取れることは，簡単に分かる．但し，ρ は $[0, \infty)^n$ 上の通常の距離である．この事実と定理 3.4 と補題 3.5 により，次の命題が得られる．

命題 3.7. X をコンパクトでない，局所コンパクトな可分距離空間とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，X 上のあるプロパーな距離 ρ_n で $\dim u_{\rho_n} X \setminus X = \operatorname{ind} u_{\rho_n} X \setminus X = \operatorname{Ind} u_{\rho_n} X \setminus X = n$ となるものが存在する．

距離として全有界なものを取った場合は 命題 3.7 より強い結果が得られる．まず，次の補題を証明する．

補題 3.8. (K, ρ) をコンパクト距離空間，X を K の稠密な部分空間とする．このとき，$d = \rho|_X$ とすると d は全有界[6] でかつ $K \approx u_d X$ となる．

[6]空間 X 上の距離 d が全有界であるというのは，(X, d) が全有界のときをいう．

証明. d が全有界であることは明らかなので命題 1.1 より，X の互いに素な閉集合 A と B に対して，$\mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Cl}_{u_dX} B = \emptyset$ と $\mathrm{Cl}_K A \cap \mathrm{Cl}_K B = \emptyset$ が同値であることを示せば十分である．まず，$\mathrm{Cl}_K A \cap \mathrm{Cl}_K B = \emptyset$ が成立しているとする．このとき，$d(A,B) \geq \rho(\mathrm{Cl}_K A, \mathrm{Cl}_K B) > 0$ から，$\mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Cl}_{u_dX} B = \emptyset$ がわかる．一方，$\mathrm{Cl}_K A \cap \mathrm{Cl}_K B \neq \emptyset$ と仮定すると $d(A,B) = 0$ から，$\mathrm{Cl}_{u_dX} A \cap \mathrm{Cl}_{u_dX} B \neq \emptyset$ となり，補題は示された． □

この結果から次が成り立つ．

補題 3.9. X をコンパクトでない局所コンパクト可分距離空間とし，K を距離化可能な連続体とする．このとき，X 上の全有界な距離 d で $u_dX \setminus X \cong K$ となるものが存在する．

証明. Aarts-Van Emde Boas の結果 (cf. [1], [17]) より，X のあるコンパクト化 αX で $\alpha X \setminus X \cong K$ となるものが存在する．このとき，αX は可算ネットワークを持つコンパクト空間なので，αX は距離化可能であることがわかる．ここで，ρ を αX 上の任意の距離とし，$d = \rho|_X$ とおく．補題 3.8 より，d は全有界であり $\alpha X \approx u_dX$ かつ，$u_dX \setminus X \cong K$ となる． □

補題 3.9 より次の命題が得られる．

命題 3.10. X をコンパクトでない局所コンパクトな可分距離空間であるとする．このとき，任意の負でない整数 n に対して，次が成立する．

(1) X 上のある全有界な距離 s_n で $\dim u_{s_n}X \setminus X = \mathrm{ind}\, u_{s_n}X \setminus X = \mathrm{Ind}\, u_{s_n}X \setminus X = n$ となるものが存在する．

(2) X 上のある全有界な距離 t_n で $\mathrm{Sd}\, u_{t_n}X \setminus X = n$ となるものが存在する．但し，$\mathrm{Sd}\, Y$ は, 空間 Y のシェープ次元を表す (cf. [13, II, 1.1])．

証明. $n = 0$ のときは一点コンパクト化を考えればよい．$n \geq 1$ のときは $\mathbb{I}^n$ や S^n を補題 3.9 に適用し，さらに $\mathrm{Sd}\, S^n = n$ であることから直ちに従う． □

最後に命題 3.10 の手法の応用として，Stone-Čech コンパクト化の近似を与えてこの節を終える．まず最初に，特異コンパクト化の概念を思い出しておく．X をコンパクトでない空間，Y をコンパクト空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，Y における f の特異集合 $S(f)$ を次のように定める (cf. [2])．

$$S(f) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \begin{array}{c} y \text{ の } Y \text{ における任意の開近傍 } U \text{ に対して,} \\ \mathrm{Cl}_X f^{-1}(U) \text{ はコンパクトでない} \end{array} \right\}$$

このとき，写像 f が特異であるとは $S(f)=Y$ であるときをいう (cf. [10]). 任意の特異写像 f に対して，f から生成された X の特異コンパクト化を次のように構成する．まず，集合としては，直和 $X\cup Y$ を考え，X における近傍系はもともとの空間 X のそれと同じものと定める．Y の点における近傍系は Y の開近傍 U と X のコンパクト集合 F に対して，$U\cup(f^{-1}(U)\setminus F)$ から生成されたものとする．この近傍系から生成された位相において $X\cup Y$ は X のコンパクト化となり，$X\cup_f S(f)$ と表記する．X のコンパクト化 αX が特異コンパクト化 であるとは, ある特異写像 f で $\alpha X\approx X\cup_f S(f)$ となるときをいう (cf. [4], [5], [10]). また，αX が X の特異コンパクト化であることの必要かつ十分条件は, $\alpha X\setminus X$ が αX のレトラクトとなっていることである (cf. [10, Theorem 1]).

次に，Hausdorff 空間が Peano 空間であるとは, それが $\mathbb{I}=[0,1]$ からの連続像であるときをいう．また，有名な Hahn-Marzurkiewicz の定理により，Peano 空間は局所連結な距離化可能連続体として特徴付けられている．さらに，Hausdorff 空間が 弱 Peano 空間であるとは, それが実数直線 $\mathbb{R}$ の稠密な連続像をもつときをいう．明らかにPeano 空間 は弱 Peano 空間 である．

ここで，次の補題は [3, Theorem 3] の局所コンパクト可分距離空間の場合の精密化した定理となっている．

補題 3.11. X をコンパクトでない局所コンパクトな可分距離化可能空間，K を一点でない距離化可能な弱 Peano 空間，A と B を X における互いに素なコンパクトでない閉集合，N を $\mathbb{N}$ と同相で X の C-embedded な部分空間とし $N\cap(A\cup B)=\emptyset$ を満たしているものとする．さらに，K の異なる 2 点 p, q に対して，p と q の近傍 U_p と U_q で $\mathrm{Cl}_K U_p\cap\mathrm{Cl}_K U_q=\emptyset$ となるものを取る．このとき，次の条件を満たす連続写像 $g:X\to K$ が存在する．

(1) $g(N\cup A\cup B)$ は K の可算稠密部分集合でかつ $K=S(g)$.

(2) $g(A)\subset U_p$ かつ $g(B)\subset U_q$.

(3) X 上のある全有界な距離 d で $u_dX\approx X\cup_g K$ かつ $\mathrm{Cl}_{u_dX} A\cap\mathrm{Cl}_{u_dX} B=\emptyset$.

証明. d_K を K 上の位相に合致する距離とし，N を $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ と添え字付ける．ここで，K が弱 Peano 空間であることから，ある連続写像 $f:\mathbb{R}\to K$ で $f(\mathbb{R})$ が K で稠密となるようなものが取れる．このとき，$f^{-1}(U_p)\cap f^{-1}(U_q)=\emptyset$ であることから，$r_p\in f^{-1}(U_p)\cap\mathbb{Q}$ と $r_q\in f^{-1}(U_q)\cap\mathbb{Q}$ が取り出せる．$\mathbb{Q}$ を $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ と並べ，$\varphi : N\cup A\cup B\to\mathbb{Q}$ を次のように定義する．

$$\varphi(x)=\begin{cases} r_p, & x\in A \text{ のとき},\\ r_q, & x\in B \text{ のとき},\\ q_n, & x=x_n \text{ のとき}.\end{cases}$$

このとき，ある連続写像 $\psi : X \to \mathbb{R}$ で $\psi|_{N\cup A\cup B} = \varphi$ を満たすものが存在するので $g = f \circ \psi$ とおく．明らかに，g は上の条件 (1), (2) は満たしており，(3) を示せば十分である．ここで，写像 $e : X \to \omega X \times K$ を $e(x) = (x, g(x))$ と定める．明らかに，e は埋め込みであり，$\mathrm{Cl}_{\omega X\times K}\, e(X)$ は K を剰余として持つ X のコンパクト化である．そこで，$\alpha X = \mathrm{Cl}_{\omega X\times K}\, e(X)$ とおく．$d_{\omega X}$ を ωX 上の距離とし，$\omega X \times K$ 上の距離 s を，任意の (x,u), $(y,v) \in \omega X \times K$ に対して $s((x,u),(y,v)) = d_{\omega X}(x,y) + d_K(u,v)$ と定める．このとき，d を s から誘導される X 上の距離，すなわち，任意の $x, y \in X$ に対して $d(x,y) = s((x,g(x)),(y,g(y)))$ と定める．ここで，補題 3.8 より d は全有界であり，$\alpha X \approx u_d X$ であるので，αX が X の特異コンパクト化であること，つまり，$\alpha X \approx X \cup_g K$ を示せばよい．

ここで，$\varepsilon : X \cup_g K \to \alpha X$ を次のように定義する．

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} e(x), & x \in X \text{ のとき}, \\ (\infty, x), & x \in K \text{ のとき}. \end{cases}$$

明らかに ε は全単射であり，$X \cup_g K$ はコンパクトなので，ε が連続であることを示せば十分である．まず，コンパクト上昇列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$K_n \subset \mathrm{Int}_X K_{n+1}$ かつ $X = \bigcup_{n\in N} K_n$ であるものが取れることに注意する．U を αX における開集合とする．このとき，$U \cap (\alpha X \setminus X) \neq \emptyset$ と仮定してよい．さらに，ある $m \in \mathbb{N}$ とある K の開集合 V で $((\omega X \setminus K_m) \times V) \cap \alpha X = U$ と仮定してよい．このとき，$\varepsilon^{-1}(((\omega X \setminus K_m) \times V) \cap \alpha X) = V \cup (g^{-1}(V) \setminus K_m)$ であるので，ε は連続である．これにより，αX は X の特異コンパクト化となる．

最後に，$\mathrm{Cl}_{u_d X} A \cap \mathrm{Cl}_{u_d X} B = \emptyset$ であること，つまり $\mathrm{Cl}_{X\cup_g K} A \cap \mathrm{Cl}_{X\cup_g K} B = \emptyset$ であることを示す．そうでないと仮定して $r \in \mathrm{Cl}_{X\cup_g K} A \cap \mathrm{Cl}_{X\cup_g K} B$ を取ると，(2) の事実から，$r \in \mathrm{Cl}_K U_p \cap \mathrm{Cl}_K U_q$ となり矛盾である．□

このとき，次の補題が得られる．

補題 3.12. X をコンパクトでない局所コンパクトな可分距離化可能空間とし，K を距離化可能で一点でない弱 Peano 空間とする．このとき，X の Stone-Čech コンパクト化に対する次の近似が得られる．

$$\beta X \approx \sup\{u_d X : u_d X \setminus X \cong K,\ u_d X \text{ は特異コンパクト化かつ } d \text{ は全有界}\}.$$

証明．A と B を X における互いに素な閉集合とする．このとき，A, B は共にコンパクトでないと仮定してよい．ここで，自然数 $\mathbb{N}$ と同相で C-embedded な部分空間 $N = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ を，$\{B_{\frac{1}{2}}(x_n, d) : n \in \mathbb{N}\}$ が X で離散集合族となるように A の中から取る．そこで，$A_0 = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{2}}(x_{2n-1}, d)$, $A_1 = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{2}}(x_{2n}, d)$ とおく．そこで $\{A_0, B\}$ と $\{A_1, B\}$ は X における互いに素な閉集合の組であり，$N_0 = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ も $N_1 = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ も $\mathbb{N}$ と同相で X における C-embedded な部分空間であることから，補題 3.11 を $i \neq j$ である各 $i, j = 0, 1$ に

対し $\{A_i, B\}$ と N_j に適用する．このとき，X 上のある全有界な距離 $d_i = d_{A_i,B}$ で $u_{d_i}X$ が特異コンパクト化かつ各 $i = 0,1$ に対して，$\mathrm{Cl}_{u_{d_i}X} A_i \cap \mathrm{Cl}_{u_{d_i}X} B = \emptyset$ を満たすようなものが存在する．そこで，$\gamma X = \sup\{u_{d_0}X,\ u_{d_1}X\}$ とおく．各 $i = 0,1$ に対して，$\mathrm{Cl}_{u_{d_i}X} A_i \cap \mathrm{Cl}_{u_{d_i}X} B = \emptyset$ であることから，$\mathrm{Cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{Cl}_{\gamma X} B = \emptyset$ が成立する．ここで，δX を以下のように定める．

$$\delta X = \sup\{u_{d_{A_i,B}}X : i = 0,1,\ \text{かつ}\ \{A, B\}\ \text{は}\ X\ \text{において互いに素な閉集合}\}$$

ここで，$\delta X \geq \gamma X$ であることから，X における互いに素な閉集合の組 $\{A, B\}$ に対して，$\mathrm{Cl}_{\delta X} A \cap \mathrm{Cl}_{\delta X} B = \emptyset$ が成立する．これは正規空間の Stone-Čech コンパクト化の特徴付けであるので, これより $\delta X \approx \beta X$ となる． □

この補題 3.12 より，次の命題を得る．

命題 3.13. X をコンパクトでない局所コンパクト可分距離化可能空間とする．このとき，2 以上の任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して以下が成立する．

(1)

$$\beta X \approx \sup\left\{ u_dX \;\middle|\; \begin{array}{c} \dim u_dX \setminus X = \operatorname{ind} u_dX \setminus X = \operatorname{Ind} u_dX \setminus X = n \\ \text{かつ}\ u_dX\ \text{は特異コンパクト化で}\ d\ \text{は全有界} \end{array} \right\}$$

(2)

$$\beta X \approx \sup\left\{ u_dX \;\middle|\; \begin{array}{c} \operatorname{Sd} u_dX \setminus X = n \\ \text{かつ}\ u_dX\ \text{は特異コンパクト化で}\ d\ \text{は全有界} \end{array} \right\}$$

参考文献

[1] J.M. Aarts and P. Van Emde Boas, *Cotinua as remainders in compact extension*, Nieuw Archief voor Wiskunde 15 (1967), 34-37.

[2] G.L.Jr. Cain, R.E. Chandler, and G.D. Faulkner, *Singular sets and remainders*, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 161-171.

[3] R.E. Chandler, *Continua as remanders, revisited*, Gen. Top. Appl. 8 (1978), 63-66.

[4] R.E. Chandler and G.D. Faulkner, *Singular compactifications:the order structure*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 377-382.

[5] R.E. Chandler, G.D. Faulkner, J.P. Guglielmi, and M. Memory, *Generalizing the Alexandroff-Urysohn double circumference construction*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 606-608.

[6] M. G. Charalambous, *A remark on R.G. Woods' paper "The minimum uniform compactification of a metric space"*, Fund. Math. 149 (1996), 287-288.

[7] A.N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology 37 (1998), 791-803.

[8] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[9] R. Engelking, *Theory of Dimension Finite and Infinite*, Helderman Verlag, Berlin, 1995.

[10] G.D. Faulkner, *Compactifications whose remainders are retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 984-988.

[11] K. Kawamura and K. Tomoyasu, *Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications*, Coll. Math. 88 (2001), 75-92.

[12] Y. Kodama and K. Nagami, *General topology* (*Japanese*), Iwanami, Tokyo, 1974.

[13] S. Mardešić and J. Segal, *Shape Theory*, North-Holland Publ. Comp., 1982.

[14] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[15] E.G. Sklyarenko, *On perfect bicompact extensions*, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 238-240.

[16] Ju.M. Smirnov, *On the dimension of remainders in bicompact extensions of proximity and topological spaces* (*Russian*), Math. Sb. (N.S.) 69 (111) (1966), 141-160.

[17] A.K. Steiner and E.F. Steiner, *Compactifications as closure of graphs*, Fund. Math. 63 (1968), 221-223.

[18] R. G. Woods, *The minimum uniform compactification of metric space*, Fund. Math. 147 (1995), 39-59.